Ponovitev analize

Odvodi

1. $\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$
2. $x^n = nx^{n-1}$
3. $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
5. $\sin(ax) = a\cos ax$
6. $\cos(ax) = -a\sin(ax)$
7. $\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $e^a x = ae^{ax}$
9. $a^x = a^x \ln a$
10. $x^x = x^x(1 + \ln x)$
11. $lnx = \frac{1}{x}$
12. $log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
13. $\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
16. $\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$

Integrali

1. $\int x^a\,dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & a \neq -1 \\ \ln|x| + C & a = -1 \end{cases}$
2. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$
4. $\int e^x\,dx = e^x + C$
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \cos(ax)\,dx = \frac{sin(ax)}{a} + C$
7. $\int \sin(ax)\,dx = \frac{-cos(ax)}{a} + C$
8. $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$
12. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}ln|ax+b| + C$
13. $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = arctanx + C$
14. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctan\frac{x}{a} + C$
15. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = ln|f(x)| + C$

Integriranje absolutnih vrednosti (primer): Imamo funkcijo $f(x) = |x|$, ki je zvezna na intervalu $[-1, 1]$ Ce hocemo to funkcijo integrirati in zelimo izracunati njeno *porazdelitveno* funkcijo integrirati locimo 2 primera:

1. $-1 \leq x < 0$
   $F(x) = \int_{-1}^{x} |t|\,dt = \int_{-1}^{x} -t\,dt = -\frac{t^2}{2}|_{-1}^{x} = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)$
2. $0 \leq x < 1$
   $F(x) = \int_{-1}^{x} |t|\,dt = \int_{-1}^{0} -t\,dt + \int_{0}^{x} t\,dt = -\frac{t^2}{2}|_{0}^{-1} + -\frac{t^2}{2}|_{0}^{x} = \frac{1}{2}(1 + x^2)$

$\sqrt[n]{x}^m = (x)^{\frac{m}{n}}, x^2 + y^2 \leq 1 \sim krog\ s\ ploscino\ \pi$

1 Kombinatorika

1.1 Permutacije

1. brez ponavljanja: $P_n = n!$
2. s ponavljanjem: $P_n^{k_1,..,k_n} = \dfrac{n!}{k_1!,..,k_n!}$

1.2 Variacije

1. brez ponavljanja: $V_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
2. s ponavljanjem: $V_n^r = n^r$

1.3 Kombinacije

1. brez ponavljanja: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$
2. s ponavljanjem: $(\binom{n}{k}) = \binom{n+k-1}{k}$

Lastnosti binomskega simbola: $\binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

Binomski izrek:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Za kombinacije velja, da vrstni red **ni** pomemben. Medtem pa ko v splosnem za variacije in permutacije velja, da vrstni red **je** pomemben.

2 Verjetnost

2.1 Elementarna verjetnost

Izid iz dane mnozice izidov je izbran na slepo, ce so vsi izidi iz te mnozice enako verjetni. Takrat se dogodek A zgodi z verjetnostjo:

$$P(A) = \frac{st.\ izidov,\ ki\ so\ v\ A}{st.\ vseh\ izidov}$$

Nasprotni dogodek pa z verjetnostjo:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Nacelo vkljucitev in izkljucitev dogodkov:

$$\begin{gathered} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) \\ -P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \cdots - P(A_{n-1}A_n) \\ +P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_4) + \cdots + P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \ldots \\ +(-1)^{n+1}P(A_1 \ldots A_n) \end{gathered}$$

Dogodki $A_1, A_2, \ldots, A_k$ in B so **neodvisni**, ce velja

$$P(A_1 \ldots A_k) = P(A_1) \ldots P(A_k)$$

ali z drugimi besedami... Verjetnost produkta paroma neodvisnih dogodkov je enaka produktu vrjetnosti teh dogodkov.

2.2 Pogojna verjetnost Verjetnost da se zgodi dogodek A, ce vemo, da se zgodi dogodek B, je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Dogodka A in b sta **neodvisna**, ce velja $P(A|B) = P(A)$ ali $P(AB) = P(A)P(B)$. Pazi! Za par **nezdruzljivih** dogodkov A in B pa velja $P(AB) = 0$, $P(A+B) = P(A) + P(B)$, $P(A|B) = 0$ in $P(B|A) = 0$.

2.3 Popolna verjetnost

Dogodki $H_1, H_2, \ldots H_n$ tvorijo **popoln sistem dogodkov**, ce se nobena dva dogodka ne moreta zgoditi hrkati in se vedno zgodi vsaj en od njih. Ce dogodki izpolnjujejo ta pogoj, potem po nacelu vkljucitev/izkljucitev velja:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_1)P(A|H_i)$$

Za **popolni sistem dogodkov** velja unija hipotez:

$P(A|H_1 \cup \dots \cup H_n) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)+\dots+P(A|H_n)P(H_n)}{P(H_1)+\dots+P(H_{n-1})+P(H_n)}$

Zanje velja tudi **Bayesova formula**:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}$$

2.4 Geometrijska verjetnost

Tocka je izbrana *na slepo* iz intervala, lika, telesa.. ce za vsak dogodek A velja:

$$P(A) = \frac{mera\,izidov,\,ki\,so\,v\,A}{mera\,vseh\,izidov}$$

Pri tem je mera lahko dolzina, ploscina, volumen,.. Basically upas da narises graf pravilno.

Splosno za vse nastete verjetnosti velja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ in}$$
$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

3 Diskretne s.s.

3.1 Diskretna slucjana spremenljivka Naj bo X diskretna slucajna spremenljivka $\implies$ X je funkcija s koncno ali stevno zalogo vrednosti $a_1, a_2, \dots$ Verjetnost, da X zavzame vrednost $a_i \in R$, oznacimo z $P(X = a_i) = p_i$. Porazdelitev X lahko podamo na dva enakovredna nacina, in sicer s:

1. s **porazdelitveno shemo**

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

   velja $0 \le p_i \le 1$ in $p_1 + p_2 + \dots = 1$

2. s **porazdelitveno funkcijo**

$$F_x(x) := P(X \le x)$$

3.2 Bernoullijeva slucajna spremenljivka

$$X \sim B(p)$$

- V vsakem poskusu ima dogodek A verjetnost p, X pa ima vrednost 1, ce se je zgodil dogodek A, in 0 sicer.
- $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$

3.3 Binomska slucajna spremenljivka

$$X \sim B(n, p)$$

- X je stevilo pojavitev izida A v n ponovitvah poskusa
- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}$ za $k = 0, 1, \dots, n$.

Izvajamo n neodvisnih slucajnih poskusov. V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek A s konstantno verjetnostjo p, $p = P(A)$. X nam pove kolikokrat se je zgodil dogodek A v n poskusih. npr. kovanec vrzemo 10x, koliksne so vrjetnosti, da pade cifra 0x, 2x, vsaj 3x,.. ali 5x vrzemo posteno kocko, izracunaj stevilo sestic, ki pade $\implies B(5, \frac{1}{6})$

3.4 Geometrijska slucajna spremenljivka

$$X \sim G(p)$$

- X je stevilo ponovitev poskusa do (vkljucno) prve ponovitve izida A.
- $P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$ za $k = 1, 2, \dots$
- $P(X \le k) = 1 - (1-p)^k$ za $k = 1, 2, \dots$

Izvajamo neodvisne slucajne poskuse, dokler se ne zgodi dogodek A. V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek A s **konstantno** verjetnostjo p, $p = P(A)$. npr. koliko metov kocke je potrebnih, do prve sestice $\implies G(1/6)$.

3.5 Pascalova oz. **negativna binomska** slucajna spremenljivka

$$X \sim P(n, p)$$

- X je stevilo ponovitev poskusa do (vkljucno) n-te ponovitve izida A.
- $P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} (1-p)^{k-n} p^n$ za $k = n, n+1, n+2, \dots$

npr. koliko metov kocke je potrebnih, dokler sestica ne pade 5x $\implies P(5, \frac{1}{6})$. Stevilo metov kovanca, dokler grb ne pade 2x $\implies P(2, \frac{1}{2})$.

3.6 Hipergeometrijska slucjana spremenljivka

$$X \sim H(K, N-K, n)$$

- X je stevilo elementov z doloceno lastnostjo med izbranimi.
- $P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ za k $= 0, 1, 2, \dots min\{n, K\}$

V populaciji N imamo K elementov z doloceno lastnostjo. Izbiramo brez vracanja n elementov. npr. koliko pikov med 7 kartami, ki smo jih na slepo izbrali izmed 16 kart, kjer so bli stirje piki. imamo 400 ljudi, 100 brezposlenih, nakljucno jih izberemo 10. Zanima nas kaksna verjetnost je da sta 2 izmed teh brezposelna $\implies P(x = 2) = H(100, 400 - 100, 10)$. **Pozor!** Na kolokviju/izpitu moras nujno zapisati tudi mozne vrednosti k-ja.

3.7 Poissonova slucajna spremenljivka

$$X \sim P(\lambda)$$

- X je stevilo ponovitev dogodka A na danem intervalu, pri cemer:
  - se dogodki pojavljajo neodvisno
  - povprecno stevilo dogodgov λ, ki se pojavjio na dolocenem intervalu, je konstantno.
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ za k $= 0, 1, 2, \dots$

npr. ce se dogodek pojavi v povprecju 3x na minuto, lahko uporabimo poissa za izracun kolikokrat se bo dogodek zgodil v 1/4h $\implies P(45)$. St avtomobilov, ki preckajo cesto v 1min.

4 Zvezne s.s.

4.1 Zvezna slucajna spremenljivka Naj bo X zvezna slucajna spremenljivka $\implies$ X je realna funkcija, za katero obstaja integrabilna funkcija $p_X : R \to [0, \infty)$, tako da za vsak $x \in R$ velja:

$$F_X(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)\,dt$$

Funkciji p_X pravimo **gostota verjetnosti**, funkciji F_X pa **porazdelitvena** funkcija. Mnozici vrednosti, ki jih zavzame spremenljivka X, pravimo **zaloga vrednosti** in jo oznacimo z Z_X. Lastnosti:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\,dx = 1$
- $P(a < X < b) = \int_a^b p_X(x)\,dx = F_X(b) - F_X(a),\ a, b \in R,\ a < b$
- $P(X = a) = 0, a \in R$
- $P(|X| < 1) = P(-1 < X < 1)$

ce je funkcija zvezna v x, potem za njo velja tudi $F'(x) = p(x)$. Za zvezno slucajno spremenljivko X je *funkcija prezivetja* $S(x) = P(X > x)$ vedno zvezna, nenarascujoca in zavzema vrednosti na intervalu $[0, 1]$. **4.2 Enakomerna zvezna** slucajna spremenljivka

$$X \sim U[a, b]$$

- $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & sicer \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$

Vsi izidi na intervalu $[a,\ b]$ so enako verjetni.

4.3 Eksponentna slucajna spremenljivka

$$X \sim \epsilon(\lambda)$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$

Slucajna spremenljivka X - cas med zaporednima dogodkoma, pri cemer so dogodki neodvisni in se pojavijo s konstantno stopnjo λ. λ predstavlja povprecno stevilo dogodkov na izbrano casovno enoto.

4.4 Normalna slucajna spremenljivka

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

- $p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ za $x \in R$
- Za $F_X(x)$ ne obstaja eksplicitna formula. Vrednost preberemo iz porazdelitvenih tabel.

Po centralnem limitnem izreku sta vsota in povprecje veliko neodvisnih, enako porazdeljenih spremenljivk, *normalno porazdeljeni.* Porzadelitev $N(0, 1)$ je standardna normalna porazdelitev $\implies$ potem za vsak x velja $P(X < x) = 1 - P(X > x)$.

4.5 Gamma slucajna spremenljivka

$$X \sim \Gamma(n, \lambda)$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} & x > 0 \end{cases}$

V povprecju imamo na casovno enoto λ ponovitev dogodka A, X pa je cas med prvo in $(n + 1)$ ponovitvijo dogodka A.

4.6 Hi kvadrat slucajna spremenljivka

$$X \sim \chi^2(n) = \Gamma(\tfrac{n}{2}, \tfrac{1}{2})$$

- $p_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} & x > 0 \end{cases}$

Je vsota kvadratov n neodvisnih standardnih normalnih slucajnih spremenljivk.

5 Matematicno upanje

5.1 Matematicno upanje diskretne slucajne spremenljivke

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

oz. zvezne slucajne spremenljivke z gostoto p_X je

$$E(X^n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^n p_k \text{ oz.}$$
$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^n p_X(x)\,dx.$$

Za vsaki slucajni spremenljivki X in Y (lahko sta odvisni, lahko je ena zvezna in druga diskretna) ter $a, b, n \in R$ velja

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

in

$$nE(X^a Y^b) = nE(X^a)E(Y^b)$$

in

$$E((X + Y)^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2) \text{ itn...}$$

Matematicno upanje nam pove pricakovano vrednost, kolikokrat oz. kdaj (odvisno od porazdelitve) se bo dolocen dogodek zgodil. Po definiciji disperzije velja tudi:

$$E(X^2) = D(X) + E(X)^2$$

5.2 Matematicno upanje funkcije $f :\ R \to R$ slucajne spremenljivke X je

$$E(f(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(x_k)p_k \text{ oz.}$$
$$E(f(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_X(x)\,dx.$$

5.3 Matematicna upanja dss in zss

- $X \sim Bernoulli(p) \implies E(X) = p$
- $X \sim Binom(n, p) \implies E(X) = np$
- $X \sim G(p) \implies E(X) = \frac{1}{p}$
- $X \sim Pascal(n, p) \implies E(X) = \frac{n}{p}$
- $X \sim H(R, B, n) \implies E(X) = \frac{nR}{R+B}$
- $X \sim Pois(\lambda) \implies E(X) = \lambda$
- $X \sim U[a, b] \implies E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $X \sim \epsilon(\lambda) \implies E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $X \sim N(\mu, \sigma) \implies E(X) = \mu$
- $X \sim \chi^2(n) \implies E(X) = n$

6 Disperzija in std. odklon

6.1 Disperzija ali *varianca* slucajnje spremenljivke X je definirana kot

$$D(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

Za $a, b \in R$ velja

$$D(aX + b) = a^2 D(X).$$

Ce sta X in Y *neodvisni* je

$$D(aX + bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) \text{in}$$
$$D(XY) = E(X^2Y^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - E(X)^2E(Y)^2$$

6.2 Standardni odklon slucajnje spremenljivke X je enak

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

6.3 Disperzije dss in zss

- $X \sim B(p) \implies D(X) = p(1-p)$
- $X \sim B(n, p) \implies D(X) = np(1-p)$
- $X \sim G(p) \implies D(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- $X \sim P(n, p) \implies D(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}$
- $X \sim H(R, B, n) \implies$

$$\frac{nRB(R+B-n)}{(R+B)^2(R+B-1)}$$

- $X \sim P(\lambda) \implies D(x) = \lambda$
- $X \sim U[a, b] \implies D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $X \sim \epsilon(\lambda) \implies D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $X \sim N(\mu, \sigma) \implies D(X) = \sigma^2$
- $X \sim \chi^2(n) \implies D(X) = 2n$

7 Slucajni vektorji

7.1 Diskretni slcuajni spremenljivki X in Y lahko dolocata (dvorazsesni) **diskretni slucajni vektor** (X, Y). Verjetnost, da (X, Y) zavzame vrednost $(x_i, y_i) \in R$,

$$\text{oznacimo s } P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}.$$

Porazdelitev (X, Y) lahko podamo na dva enakovredna nacina, in sicer:

1. s **porazdelitveno tabelo**

	$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	$\cdots$	X
	x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	$\cdots$	p_1
	x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	$\cdots$	p_2
(X, Y)	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	$\cdots$	p_n
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	Y	q_1	q_2	$\cdots$	q_m	$\cdots$	1

   pri cemer je $0 \leq p_{ij} \leq 1$, $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = p_i$ za vsak $i \in N$ in $\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = q_j$ za vsak $j \in N$.

2. s **porazdelitveno funkcijo**

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Velja $F_{X,Y}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} I_{[x_i,\infty)}(x) I_{[y_j,\infty)}(y)$, kjer je

$$I_{[x_i,\infty)}(x) = \begin{cases} 1 & x_i \leq x \\ 0 & sicer \end{cases}$$
$$I_{[y_j,\infty)}(y) = \begin{cases} 1 & y_j \leq y \\ 0 & sicer \end{cases}$$

Podan imamo vektor $(X \in [0, a], Y \in [0, b])$. Potem velja slednje:

- $P(X < 1) = P(X \leq 1, Y \leq b)$
- $P(X < 1, Y > \frac{1}{2}) = P(X \leq 1, Y \leq 1) - P(X \leq 1, Y \leq \frac{1}{2})$
- $P(X > 1, Y > \frac{1}{2}) =$

$P(X \leq a, \frac{1}{2} \leq Y \leq b) - P(X \leq 1, \frac{1}{2} \leq Y \leq b) = (P(X \leq a, Y \leq b) - P(X \leq a, Y \leq \frac{1}{2})) - (P(X \leq 1, Y \leq b) - P(X \leq 1, Y \leq \frac{1}{2}))$

Robne porazdelitve so porazdelitve komponent

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$$
$$q_j = P(Y = y_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

Slucajni spremenljivki X in Y sta **neodvisni**, ce za poljublni stevili $x, y \in R$ velja

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \text{ in}$$

$$P(X = x \,|\, Y = y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

7.2 dvorazsezna gostota verjetnosti Naj bosta X,Y z.s.s. Par (X, Y) je *zvezni slucajni vektor*, ce obstaja integrabilna funkcija $p_{X,Y} : R^2 \to R$ (gostota verjetnosti), tako da za vsak par $(x, y) \in R^2$ velja

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy.$$

Funkciji $F_{X,Y}$ pravimo *porazdelitvena funkcija.* Velja

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy = 1$$

Robni gostoti sta

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y)\, dy \text{ in } p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y)\, dx$$

Zvezni slucajni spremenljivki X in Y sta **neodvisni**, ce za vsaki realni stevili $x, y \in R$ velja

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

7.3 Matematicno upanje funkcije $f : R^2 \to R$ dvorazseznega slucajnega vektorja (X, Y) je za diskretni slucajni vektor definirano s predpisom

$$E(f(X, Y)) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_i)P(X = x_i, Y = y_i)$$

za zvezni slucjani vektor pa s predpisom

$$E(f(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)P_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy.$$

Ce sta X in Y **neodvisni** velja

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

7.4 Kovarianca slucajnih spremenljivk X in Y je definirana kot

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(\underline{XY}) - E(X)E(Y).$$

XY mores posebi zracunat porazdelitev(ampak pazi, ni nujno da sta neodvisni, zato, ce imas tabelo, poberi vrednosti za npr. $P(XY = 1)$ iz tabele)!
Za disperzijo velja

$$D(X) = Cov(X,X) \text{ in}$$
$$D(aX+bY) = a^2D(X) + b^2D(Y) + 2abCov(X,Y)$$

Za slucajne spremenljivke X, Y, Z ter $a, b \in R$ velja:

- $Cov(X+a, Y+b) = Cov(X,Y)$,
- $Cov(aX+bY, Z) =$ $aCov(X,Z) + bCov(Y,Z)$,
- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$,
- $|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{D(X)D(Y)}$,
- $Cov(aX, bY) = abCov(X,Y)$
- $Cov(a, X) = 0$ *(neodvisni)*

Ce sta s.s X in Y *neodvisni* je njuna kovarianca enaka **0**, $Cov(X,Y) = 0$.

7.5 Korelacijski koeficient izracunamo po formuli

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Korelacijski koeficient zavzema vrednosti na intervalu [-1, 1]. Ce velja $\rho(X,Y) = 0$, lahko sklepamo da sta spremenljivki X in Y **nekorelirani**. Za $a, b, c, d \in R$ ter $a, c > 0$ velja:

$$\rho(aX+b, cY+d) = \rho(X,Y)$$

Ce je $|Cov(X,Y)| = \sqrt{D(X)D(Y)}$, tj. $\rho(X,Y) = \pm 1$, potem sta X in Y v **linearni zvezi**

$$Y = \pm\frac{D(Y)}{D(X)}(X - E(X)) + E(Y).$$

Ker iz neodvisnosti sledi E(XY) = E(X)E(Y), sta neodvisni slucajni spremenljivki tudi nekorelirani. Obratno pa ne velja!

8 Normalna porazdelitev

8.1 Normalna porazdelitev je odvisna od dveh parametrov: $\mu = E(X) \, in \, \sigma = \sigma(X)$. Gostota njene porazdelitve je:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Standardizacija:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(\mu = 0, \sigma = 1)$$

Vrednost $F(X) = P(X \leq x)$ dobimo tako da integriramo funkcijo gostote na intervalu $[-\infty, x]$:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \, dt.$$

Velja : $P(a \leq Z \leq b) = F(b) - F(a)$ in $x \geq 4 \Rightarrow F(x) \approx 1 (std. \, napaka)$.
Ce je spremenljivka $X \sim N(0,1)$ normalno porazdeljena, velja tudi da so lihi momenti normalne porazdelitve enaki 0 ($E(X^3) = E(X^5) = 0$).

8.2 σ pravila

- $1\sigma \Rightarrow P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.683$
- $2\sigma \Rightarrow P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.954$
- $3\sigma \Rightarrow P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.997$

8.3 q_x pravila

- $P(X \leq q_1) = 0.25$
- $P(X \leq q_2(m)) = 0.5$
- $P(X \leq q_3) = 0.75$

8.4 Standardizacija binomske porazdelitve

$$X_B \sim B(n,p)$$

kjer velja $\mu = np$ in $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. velja:

$$P(a \leq X_B \leq b) \approx P(a - \tfrac{1}{2} \leq X_N \leq b + \tfrac{1}{2}) = F(\tfrac{b+\frac{1}{2}-\mu}{\sigma}) - F(\tfrac{a-\frac{1}{2}-\mu}{\sigma})$$

in

$$P(X_B \leq b) \approx P(X_N \leq b + \tfrac{1}{2}) = F(\tfrac{b+\frac{1}{2}-\mu}{\sigma})$$

. **Pazi** za normalizirane *diskretne* porazdelitve velja:

- $P(X_B < k) = P(X_B \leq k-1)$
- $P(X_B > k) = P(X_B \geq k+1) = 1 - P(X_B \leq k)$

8.5 Aproksimacija binomske porazdelitve

8.5.1 Poissonov Priblizek
Naj bo

$$X_B \sim B(n,p) \, in \, X_P \sim P(np)$$

Ce je

- $n \geq 20$ in $p \in (0, 0.05)$ ali pa
- $n \geq 100$ in $np \in (0, 10]$,

ponavadi velja:

$$P(X_B = k) \approx P(X_P = k) = \frac{(np)^k}{k!}e^{-np}.$$

8.5.2 Laplaceov Priblizek
Naj bo

$$X_B \sim B(n,p) \, in \, X_N \sim N(np, \sqrt{np(1-p)}).$$

Ce je $np \geq 10$ in $n(1-p) \geq 10$, potem za k dovolj blizu np velja:

$$P(X = k) \approx P(X_N = k) = \frac{e^{-(k-np)^2/(2np(1-p))}}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}$$

9 CLI

9.1 Normalne spremenljivke: Naj bosta $X \sim N(\mu_1, \sigma_1), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ neodvisni. Potem je

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

Posledica: Naj bodo

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1), \ldots, X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n)$$

neodvisne, normalno porazdeljene s.s. Potem velja:

$$X_1 + \cdots + X_n \sim N(\textstyle\sum_{i=1}^n \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}).$$

9.2 CLI za vsoto sl. spremenljivk Naj bodo $X_1, + \cdots +, X_n$ neodvisne in enako porazdeljene slucajne spremenljivke, kjer velja $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Potem za dovolj velik n (dobra aproksimacija : $n \geq 30$) velja, da je porazdelitev vsote $S = X_1, + \cdots +, X_n$ priblizno normalna.

$$S \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

Pri aproksimaciji **diskretne** porazdelitvene vsote z normalno porazdelitvijo, uporbljamo popravek za zveznost.

$$P(a \leq S \leq b) \approx P(a - \tfrac{1}{2} \leq Y \leq b + \tfrac{1}{2}) = F(\tfrac{b+\frac{1}{2}-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}) - F(\tfrac{b-\frac{1}{2}-n\mu}{\sigma\sqrt{n}})$$

9.3 Enostavni slucajni vzorec Naj bo X s.s. Enostavni slucajni vzorec je slucajni vektor $(X_1, + \cdots +, X_n)$, za katerega velja:

- vsi cleni vektorja X_i imajo isto porazdelitev kot spremenljivka X in
- cleni X_i so med seboj neodvisni

9.4 Vzorcno povprecje normalno porazdeljenega **vzorca** Naj bo $(X_1, + \cdots +, X_n)$ enostavni slucajni vzorec, $X_i \sim N(\mu, \sigma)$. Potem je porazdelitev vzorcnega povprecja $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ tudi normalna:

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Pozor! Pri racunanju disperzije ne pozabi kvadrirati $\frac{1}{n}$.

9.5 CLI za **vzorcno povprecje** Naj bo $(X_1, + \cdots +, X_n)$ enostavni slucajni vzorec in

$$E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 \ (\mu \ in \ \sigma^2 \ morata \ biti \ koncni)$$

Za dovolj veliki vzorec ($n \geq 30$) je porazdelitev vzorcnega povprecja $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ priblizno normalna

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

9.6 Racunanje razpona Naj bo s.s. X normalno porazdeljena $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$P(E(X) - a \leq X \leq E(X) + a) = p$$
$$I = [E(X) - a, E(X) + a]$$