1 Osnove

1.1 Odvodi

1. $\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$
2. $x^n = nx^{n-1}$
3. $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
5. $\sin(ax) = a\cos ax$
6. $\cos(ax) = -a\sin(ax)$
7. $\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $e^a x = ae^{ax}$
9. $a^x = a^x \ln a$
10. $x^x = x^x(1 + \ln x)$
11. $lnx = \frac{1}{x}$
12. $log_a x = \frac{1}{x \ln a}$
13. $\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
16. $\text{arccot}\, x = -\frac{1}{1+x^2}$

1.2 Integrali

1. $\int x^a\, dx = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & a \neq -1 \\ \ln|x| + C & a = -1 \end{cases}$
2. $\int \ln x\, dx = x\ln x - x + C$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + C$
4. $\int e^x\, dx = e^x + C$
5. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \cos(ax)\, dx = \frac{sin(ax)}{a} + C$
7. $\int \sin(ax)\, dx = \frac{-cos(ax)}{a} + C$
8. $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C$
12. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} ln|ax+b| + C$
13. $\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = arctanx + C$
14. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctan\frac{x}{a} + C$
15. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = ln|f(x)| + C$

1.3 Ponovitev logaritmov

- $log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$
- $log_b(\frac{x}{y}) = log_b x - log_b y$
- $x = b^y \implies log_b x = y$

1.4 Bayesova formula

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} = \\ = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}$$

1.5 Binomska

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}$ za $k = 0, 1, \ldots, n$.

1.6 Lastna informacija

Opisuje dogodek, ki se je zgodil:

$$I_i = \log_2(\frac{1}{p_i}) = -\log_2(p_i)$$

1.7 Entropija

je povprecje vseh lastnih informacij:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i I_i = -\sum_{i=1}^{n} p_i log_2 p_i$$

Vec zaporednih dogodkov neodvisnega vira: $X^l = X \times \cdots \times X \to H(X^l) = lH(X)$.

2 Kodi

2.1 Uvod

Povprecna dolzina k.z.

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i$$

2.2 Tipi kodov

- **optimalen** - ce ima najmanjso mozno dolzino kodnih zamenjav
- **idealen** - ce je povprecna dolzina kodnih zamenjav enaka entropiji
- **enakomeren** - ce je dolzina vseh kodnih zamenjav enaka
- **enoznacen** - ce lahko poljuben niz znakov dekodiramo na en sam nacin
- **trenuten** - ce lahko osnovni znak dekodiramo takoj, ko sprejmemo celotno kodno zamenjavo

2.3 Kraftova neenakost

obstaja trenutni kod, iff

$$\sum_{i=1}^{n} r^{-li} \leq 1$$

2.4 Povp. dolzina, ucinkovitost

Najkrajse kodne zamenjave:

$$H_r(X) = L \to l_i = \lceil -\log_r p_i \rceil$$

Ucinkovitost:

$$\eta = \frac{H(X)}{L\log_2 r}, \eta \in [0, 1]$$

Kod je **gospodaren**, ce je L znotraj:

$$H_r(X) \leq L < H_r(X) + 1$$

kjer je $H_r(X)$:

$$H_r(X) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\log_{p_i}}{\log_r} = \frac{H(X)}{\log_r}$$

2.5 Shannonov prvi teorem

Za nize neodvisnih znakov dozline n obstajajo kodi, za katere velja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{n} = H(X)$$

pri cemer je $H(X)$ entropija vira X.

2.6 Huffmanov kod

Veljati mora:

$$n = r + k(r-1), k \geq 0$$

2.7 Kod Lempel-Ziv (LZ77)

Gre za kodiranje na osnovi slovarja **Kodiranje:** uporablja drseca okna, znaki se premikajo iz desne na levo. Referenca je podana kot trojcek(odmik, dolzina, naslednji znak): npr. (0, 0, A) - ni ujemanja, (4, 3, B) - 4 znake nazaj se ponovi 3 znakovni podniz, ki se nato zakljuci s B.
dekodiranje: sledimo kodnim zamenjavam

2.8 Kod Lempel-Ziv (LZW)

Osnovni slovar je podan in ga sporti doponjujemo. Alogritem za **kodiranje**:

```
N = ""
ponavljaj:
    preberi naslednji znak z
    ce je [N,z] v slovarju:
        N = [N, z]
    drugace:
        izpisi indeks k niza N
        dodaj [N, z] v slovar
        N = z
izpisi indeks k niza N
```

Algoritem za **dekodiranje**:

```
preberi indeks k
poisci niz N, ki ustreza indeksu k
izpisi N
L = N
ponavljaj:
    preberi indeks k
    ce je k v slovarju:
        poisci niz N
    drugace:
        N = [L, L(1)]
    izpisi N
    v slovar dodaj [L, N(1)]
    L = N
```

LZW doseze optimalno stiskanje, pribliza se entropiji.

2.9 Verizno kodiranje ali RLE (run lenght encoding)

Namesto originalnih podatkov, sharnjujemo dolzino verige (fffeef → 3f2e1f).

2.10 Kompresijsko razmerje

$$R = C(M)/M$$

3 Kanali

3.1 Diskretni kanal brez spomina

Kanal je definiran kot mnozica **pogojnih verjetnosti**

$$p(y_j|x_i).$$

Pogojna verjetnost nam pove verjetnost za dogodek y_j na izhodu iz kanala, ce je na vhodu v kanal dogodek x_i.

$$\sum_j p(y_j|x_i) = 1.$$

Kanal popolnoma podamo z $r \times s$ pogojnimi verjetnostmi. $H(X|Y) =$ dvoumnost, $H(Y|X) =$ sum

3.2 Pogojna entropija

Pogojna entropija spremenljivke Y pri znanem X se zapise kot $H(Y|X)$. Vzemimo, da se je zgodil dogodek $x_i \in X$. Entropija dogodka Y je potem

$$H(Y|x_i) = -\sum_{j=1}^{s} p(y_j|x_i)\log(p(y_j|x_i)).$$

Velja: $0 \leq H(Y|x_i)$.
Ce pa o dogodku X vemo le da se je zgodil, se lahko spomnemo na vis in uporabimo **vezano verjetnost** dogodkov X in Y, ki pravi:

$$p(x_i, y_j) = p(y_j|x_i)p(x_i)$$

Za entropijo:

$$H(Y|X) = \sum_i p(x_i)H(Y|x_i) \\ = -\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} p(x_i, y_i)\log p(y_j|x_i)$$

Splosno velja: $0 \leq H(Y|X) \leq H(Y)$, ce poznamo spremenljivko X, se nedolocenost Y ne more povecati (lahko se pomanjsa).

3.2.1 Pogojna verjetnost

Verjetnost da se zgodi dogodek A, ce vemo, da se zgodi dogodek B, je

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Dogodka A in b sta **neodvisna**, ce velja $P(A|B) = P(A)$ ali $P(AB) = P(A)P(B)$. Pazi! Za par **nezdruzljivih** dogodkov A in B pa velja $P(AB) = 0$, $P(A+B) = P(A) + P(B)$, $P(A|B) = 0$ in $P(B|A) = 0$.

3.2.2 Popolna verjetnost

Dogodki $H_1, H_2, \ldots H_n$ tvorijo **popoln sistem dogodkov**,

$$P(A) = \\ \sum_{i=1}^{\infty} P(A\cap H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_1)P(A|H_i)$$

3.3 Vezana entropija spremeljivk

Vezana entropija nakljucnih spremenljivk X in Y je entropija para (X, Y). Pomembne zveze:

- $p(x_i, y_j) = p(y_j|x_i)p(x_i)$,
- $\sum_j p(x_i, y_j) = p(x_i)$,
- $\sum_i p(x_i, y_j) = p(y_j)$,
- $\sum_{i,j} p(x_i, y_j) = 1$ (pazi pri racunskih!)

Velja: $H(X, Y) = H(Y|X) + H(X)$.

3.3.1 Obrat kanala

Ker velja tudi $H(X, Y) = H(X|Y) + H(Y)$, kanal lahko **obrnemo Pogoj:** poznati moramo vhodne verjetnosti. Iz njih lahko dolocimo izhodne verjetnosti, ki jih lahko uporabimo kot vhodne verjetnosti v obrnjeni kanal. Lastnosti:

- izracun izhodnih verjetnosti $p(y_j) = \sum_i p(y_j, x_i)p(x_i)$
- obratne pogojne vrjetnosti $p(x_i, y_j) = p(y_j|x_i)p(x_i) = p(x_i|y_j)p(y_j)$

3.4 Medesebojna informacija

Pove nam, koliko o eni spremenljivki izvemo iz druge spremenljivke,

- $I(X; Y) = H(X, Y) - H(X|Y) - H(Y|X)$
- $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$
- $I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$
- $I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$
- $I(X; Y) =$ simetricna glede na X in Y
- $I(X; Y) \geq 0$
- $I(X; X) = H(X)$

3.5 Kapaciteta kanala

$$C = \max_{P(X)} I(X; Y)$$

3.5.1 Kapaciteta kanala BSK

$$P_k = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

Lastnosti:

- $C = \max_{P(X)}(H(Y) - H(Y|X))$
- $p(x_0) = \alpha, p(x_1) = 1-\alpha$
- $I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) = \cdots = H(Y) - H(p, 1-p)$
- $\frac{dI(X;Y)}{d\alpha} = 0$
- $H(Y) = 1 \Rightarrow C$ je max
- $C = I(X; Y)|_{\alpha=1/2} = 1 - H(p, 1-p)$

3.5.2 Kapacitata kanala BSK z brisanjem

$$P_k = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{pmatrix}$$

Lastnosti:

- $C = 1 - p$
- $p(x_0) = \alpha, p(x_1) = 1-\alpha$
- $p(y_0) = (1-p)\alpha, p(y_1) = p, p(y_2) = (1-p)(1-\alpha)$
- $I(X; Y) = (1-p)H(\alpha, 1-\alpha)$
- $\frac{dI(X;Y)}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = 1/2$

3.5.3 Klasicna izpitna naloga

Mas podane prehodne verjetnosti. $p(x_0) = \alpha$, $p(x_1) = 1-\alpha$. Nato izracunas vse $p(y_i) = \sum p(x_j) * p(y_i|x_j)$. Max kapaciteto izracunas tko da odvajas $C = \max I(X; Y) = \max(H(Y) - H(Y|X)) = \max(H(Y) - (\alpha H(Y|x = 0) + (1-\alpha)H(Y|x = 1)))$. Kjer za $H(Y|x_i)$ velja, da samo zracunas entropijo pri danih prehodnih verejtnostih.

3.6 Shannonov drugi teorem

Shannon je ugotovil, da nam zdruzevanje znakov v nize daje vec moznosti za doseganje zanesljivega prenosa.
Naj bo M stevilo razlicnih kodnih zamenjav, ki jih lahko oblikujemo z nizi dolzine n. Potem je **hitrost koda** (prenosa) definirana kot:

$$R = \frac{maxH(X^n)}{n} = \frac{logM}{n} = \frac{k}{n}$$

Hitrost je najvecja takrat, ko so dovoljene kodne zamenjave na vhodu enako verjetne. **Teorem:**

Za $\mathbf{R} \leq \mathbf{C}$ obstaja kod, ki zagotavlja tako preverjanje informacije, da je verjetnost napake pri dekodiran poljubno majhna. Za $\mathbf{R} > \mathbf{C}$ kod, ki bi omogocal preverjanje informacije s poljubno majhno verjetnostjo napake, **ne** obstaja.

Ce so znaki neodvisni, velja:

$$\log(H(X^n)) = n\log H(X) \Rightarrow R = H$$

Za $R \leq \frac{\log 2^{nC}}{n} = C$ je mozno najti kodne zamenjave, ki omogocajo zanesljivo komunikacijo.

4 Varno kodiranje

4.1 Hammingova razdalja

Razdalja med razlicnimi kodi mora biti vsaj 1, drugace je kod **singularen**. Razdalja je podana kot **minimalna** Hammingova razdalja med dvema kodnima zamenjavama. Stevilo napak, ki jih kod zazna:

$$d \geq e + 1 \to e_{max} = d - 1$$

$$d \geq 2f + 1 \to f_{max} = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$$

4.1.1 Hammingov pogoj

Ce zelimo zagotoviti odpornost na napake, mora biti razdalja $d > 1$. Uporabni kodi imajo st. kodnih zamenjav $M = 2^k < 2^n$. Da bi lahko dekodirali vse kodne zamenjave, pri katerih je prislo do e ali manj napak mora veljati:

$$M \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{e}\binom{n}{i}}$$

4.2 Linearni blocni kodi

Kode oznacimo kot dvojcek $L(n, k)$. O linearnih blocnih kodih govorimo, kadar:

- je vsota vsakega para kodnih zamenjav spet kodna zamenjava.
- da produkt kodne zamenjave z 1 in 0 spet kodno zamenjavo.
- vedno obstaja kodna zamenjava s samimi niclami

Hammingova razdalja linearnega koda je enaka stevilu enic v kodni zamenjavi z najmanj enicami.

4.2.1 Generatorska matrika

Generiranje kodne zamenjave lahko opisemo z generatorsko matriko.

$$\vec{x} = \vec{z}G$$

V splosnem podatkovni vektor $1 \times k$ mnozimo z generatorsko matriko $k \times n$, da dobimo kodno zamenjavo $1 \times n$. Kod, cigar generatorska matrika ima to obliko, je **sistematicni kod** - prvih k znakov koda je enakih sporocilu (podatkovnim bitom), ostalih $n - k$ znakov pa so paritetni biti.
Za diskretne kanale brez spomina jo vedno lahko zapisemo v obliki $G = (I_k|A)$.

4.2.2 Matrika za preverjanje sodosti

Linearne enacbe lahko zapisemo z matriko za preverjanje sodosti Lastnosti:

- $\vec{x}H^T = 0$
- $GH^T = 0$
- $G = (I_k|A) \Rightarrow H = (A^T|I_{n-k})$
- vsota dveh kodnih zamenjav je nova kodna zamenjava.

4.3 Sindrom v kanalu

Predpostavimo da se med posiljanjem v kanalu zgodi napaka:

$$z \to x = zG \to err \to y = x + e \to s = yH^T$$

Napako pri prenosu preprosto ugotavljamo tako, da pogledamo, ce je $s = 0$. Vendar to nam ne garantira da pri prenosu ni prislo do napake. Sindrom izracunamo na naslednji nacin(vektor velikosti $1 \times n - k$):

$$yH^T = (x + e)H^T = eH^T = s$$

Ker je verjetnost za napako obicajno $p << 1$, je niz s t napakami veliko verjetnejsi od niza s $t + 1$ napakami.

4.3.1 Standardna tabela

Imejmo ponavljalni kod (0|00) in (1|11). Sestavimo matrki G in H.

$G = [1|11]$ in $H = \begin{bmatrix}1| & 1 & 0\\ 1| & 0 & 1\end{bmatrix}$

Imamo 4 mozne sindrome: (00), (01), (10), (11). Na izhodu lahko dobimo $2^n = 8$ razlicnih nizov.

Mozne nize na izhodu in njihove sindrome obicajno razvrstimo v std. tabelo:

sindrom	popravljalnik	
00	000	111
01	001	110
10	010	101
11	100	011

V isti vrstici so nizi, ki dajo enak sindrom. V prvi vrstici so vedno kodne zamenjave, ki imajo sindrom 0. Skrajno levo je vedno niz, ki ima najmanj enic, saj je najbolj verjeten. Imenujemo ga popravljalnik. Ostale nize dobimo tako, da popravljalnik pristevamo k kodnim zamenjavam v prvi vrsti.

4.4 Hammingov kod

Hammingovi kodi so druzina linearnih blocnih kodov, ki lahko popravijo eno napako. Najlazje jih predstavimo z matriko za preverjanje sodosti, v kateri so vsi stolpci nenicelni vektorji. $H(2^m - 1 = n, 2^m - 1 - m = k)$.Stolpci v Hammingovem kodu so lahko poljubno razmetani. Pomembno je le to, da nastopajo **vsa** stevila od 1 do $2^m - 1$.

Hammingov kod je lahko:

- **leksikografski** - oznake stolpcev si sledijo po vrsti
- **sistematicni** - oznake stolpcev so pomesane

V Hammingovem kodu se za varnostne bite obicajno vzamejo tisti stolpci, ki imajo samo **eno** enico.

4.4.1 Dekodiranje

Dekodiranje leksikografskega Hammingovega koda je preprosto:

1. izracunamo sindrom $s = yH^T$
2. ce je $s = 0$, je $x' = y$
3. ce $s \neq 0$, decimalno stevilo S predstavlja mesto napake.

Za kod, ki pa ni leksikografski pogledamo, na kateri indeks se slika izracunani sindrom.

4.5 Ciklicni kodi C(n, k)

d_H v matriki H dobimo tako, da pristejemo stolpce, dokler ne dobimo nicelnega vektorja.

4.5.1 Zapis s polinomi

Imejmo osnovni vektor:

$$x = (x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0) \Leftrightarrow$$
$$x(p) = x_{n-1}p^{n-1} + x_{n-2}p^{n-2} + \dots + x_0$$

Izvedemo premik za eno mesto:

$$x' = (x_{n-2}, \dots, x_0, x_{n-1}) \Leftrightarrow$$
$$x'(p) = x_{n-2}p^{n-2} + \dots + x_0 p + x_{n-1}$$

Velja zveza: $x'(p) = px(p) - x_{n-1}(p^n - 1)$.

V mod 2 aritmetiki:

$$\Rightarrow x'(p) = px(p) + x_{n-1}(p^n - 1).$$

V mod$(p^n + 1)$ aritmetiki:

$$\Rightarrow x'(p) = px(p) \bmod (p^n + 1).$$

Izvajanje kroznega prekmika za i mest:

$$x^i(p) = p^i x(p) \bmod (p^n + 1)$$

4.5.2 Generatorski polinomi

Vrstice generatorske matrike lahko razumemo kot kodne zamenjave. Za ciklicne kode v splosnem velja: **Generatorski polinom** je stopnje m, kjer je m stevilo varnostnih bitov, in ga oznacimo kot:

$$g(p) = p^m + g_{m-1}p^{m-1} + \dots + g_1 p + 1$$

Za sistematicni kod velja: $G = [I_k | A_{k,n-k}]$. Sistematicni lahko dobimo z linearnimi operacijami nad vrsticami. Velja:

$$p^n + 1 = g(p)h(p)$$

Sepravi vsak polinom, ki polinom $p^n + 1$ deli brez ostanka, je generatorski polinom. Kako narediti kod leksikografski in hkrati sistematicni? $H_L \to H_S \to G_S$.

4.5.3 Polinom za preverjanje sodosti

$$x(p)h(p) \mod (p^n + 1) = 0$$
$$\Rightarrow h(p) = (p^n + 1) : g(p)$$

Pazi ko gradis matriko H, vrstice so indeksirane po narascujoci stopnji polinoma $h(p)$, medtem, ko pa pri gradnji matrike G, so vrstice indeksirane po padajoci stonji polinoma $g(p)$!

4.5.4 Kodiranje z mnozenjem

Kodne zamenjave so veckratniki generatorskega polinoma. Velja:

$$x(p) = z(p)g(p) mod(p^n + 1)$$

, kjer je z(p) polinom, ki ustreza podatkovnemu vektorju $\vec{z}$ Kod, ki smo ga dobili z mnozenjem, ustreza generatorski matriki, ki ima v vrsticah koeficiente $p^{k-1}g(p), \dots, pg(p), g(p)$, zato ni sistematicen.

4.5.5 kodiranje z deljenjem

Kodiranje na osnovi deljenja ustvari sistematicen ciklicen kod. Kodna zamenjava je zato sestavljena iz podatkovnega in varnostnega bloka znakov, $x = (z|r)$. Polinom podatkovnega bloka je:

$$z(p) = z_{k-1}p^{n-1} + \dots + z_1 p^1 + z_0 p^0$$

Ce pa polinom pomnozimo s p^m, dobimo na desni m nicel.

$$p^m z(p)$$

To ustreza bloku z, premaknjenem za m znakov v levo, $(z_{k-1}, \dots, z_0, 0, \dots, 0)$.

V splosnem nastavek seveda ne bo deljiv, velja pa $p^m z(p) = g(p)t(p) + r(p)$, kjer je $t(p)$ kolicnik, $r(p)$ pa ostanek, s stopnjo manj od m. Sepravi delimo $(p^m z(p))/g(p)$ in ostanek bodo nasi varnostni biti. $(z_{k-1}, \dots, z_0 | r_{m-1}, \dots r_0)$.

4.5.6 Dekodiranje

Dekodiranje ciklicnih kodov sloni na linearnih blocnih kodih. Vzemimo, da je pri prenosu prislo do napake $y = x + e$, ali pa zapisano v polinomski obliki $y(p) = x(p) + e(p) = z(p)g(p) + e(p)$.

- Najprej izracunamo sindrom. Ekvivalent enacbe $s = yH^T$ v polinomskem zapisu je $y(p) = q(p) * g(p) + s(p)$, oz. $s(p) = y(p) \bmod g(p)$.
- Ce je ostanek deljenja $y(p)$ z $g(p)$ razlicen od nic, je prislo do napake.

Iz $s(p) = y(p) \bmod g(p)$ sledi, da je v primeru, ko je napaka na zadnjih m mestih, stopnja $e(p)$ manj kot m in velja kar $e(p) = s(p)$. Za ostale napake pa lahko izkoristimo ciklicnost kodov:

- Naredimo trik, osnovno enacbo premaknemo za i mest:

  $$p^i y(p) = p^i x(p) + p^i e(p)$$

- Ce najdemo pravi i, bo veljalo $p^i e(p) = s(p)$
- Pravi i je tisti, pri katerem bo $e(p)$ imel najmanj enic

4.5.7 Zmoznosti ciklicnih kodov

Odkrivanje napak s ciklicnimi kodi, kjer velja $1 < \text{ st } (g(p)) < n$:

- Kod odkrije vsako posamicno napako: $e(p) = p^i$
- Za dolocene generatorske polinome odkrije tudi dve posamicni napaki do dolzine bloka $n = 2^m - 1$
- Odkrije poljubno stevilo lihih napak, ce $p + 1$ deli $g(p)$
- Odkrije vsak izbruh napak do dolzine m
- Odkrije vse razen $2^{-(m-1)}$ izbruhov dozline $m + 1$
- Odkrije tudi vse razen delez 2^{-m} izbruhov daljsih od $m + 1$

Popravljanje napak s ciklicnimi kodi, kjer velja $1 < \text{ st } (g(p)) < n$:

- Izracun sindroma
- Ciklicno prilaganje sindroma prenesenemu blok y.
- Popravijo lahko do $e = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ posamicnih napak, kjer je d Hammingova razdalja koda.
- Popravijo lahko tudi izbruhe napak do dolzine $e = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$

4.5.8 CRC

tabela: p^0 -> p^{m-1}, vhod, res

```
ce XOR (p^n-1, vhod) == 0:
    shift register v desno, na zacetku dodaj 0
drugace:
    shift register v desno, na zacetku dodaj 1
    XOR g(p) z r
XOR g(p) z r
[1, 0, 1, 1] -> 1101
```

5 Analiza signalov

5.1 Invariantnost sinusoid

Pomembno pri signalih pa je, da se vhodni signal v obliki sinusoide

$$x(t) = A\sin(2\pi\nu t + \theta)$$

popaci v izhodni signal z drugacno amplitudo in fazo θ, vendar ohrani frekvenco ν.

5.2 Fourierova transformacija

Vsako periodicna funkcijo (ce je dovolj lepa), lahko zapisemo kot kombinacijo sinusoid. V kombinaciji z invariantnostjo sinusoid to pomeni, da lahko:

- vsako funkcijo razstavimo na sinusoide
- obravnavamo obnasanje vsake sinusoide v sistemu posebej
- na koncu zdruzimo locene rezultate

5.2.1 Fourierova vrsta

Funkcija je periodicna s periodo T, ce velja:

$$x(t + T) = x(t), \forall t : -\infty < t < \infty$$

kjer je T najmanjsa pozitivna vrednost s to lastnostjo.

Funkciji $\sin(t)$ in $\cos(t)$ sta periodicni s periodo $2\pi \Rightarrow$ Funkciji $\sin(\frac{2\pi t}{T})$ in $cos(\frac{2\pi t}{T})$ sta potem periodicni funkciji s periodo T in frekvenco $\nu_0 = \frac{1}{T}$.

Cas merimo v sekundah, frekvenco pa v stevilu ciklov na sekundo. Pri analizi signalov zapis veckrat poenostavimo tako, da namesto frekvence uporabimo kotno hitrost

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Visji harmoniki sinusoid s frekvenco ν_0 so sin in cos funkcije s frekvencami, ki so veckratniki osnovne frekvence, $n\nu_0$.

Fourier je pokazal, da lahko **vsako** periodicno funkcijo $x(t)$ s periodo T zapisemo kot:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

za $n \geq 1$.

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T^0 x(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$\sum_{n=-\infty}^{n} C_n e^{in\omega_0 t}$$

To velja za vsako funkcijo, ki zadosca Dirichletovim pogojem:

- je enoznacna (za vsak t ena sama vrednost)
- je koncna povsod, oz. njen integral je koncen
- je absolutno integrabilna (ima koncno energijo)

  $$\int_0^T |x(t)|dt < \infty$$

- mora imeti koncno stevilo ekstremov v vsakem obmocju
- imeti mora kncno stevilo koncnih nezveznosti v vsakem obmocju

Bolj kompaktna predstavitev je z uporabo **Eulerjeve formule** $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$, $i = \sqrt{-1}$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

Koeficienti so kompleksni:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-in\omega_0}dt = \int_{\frac{-T/2}{T/2}} x(t)e^{-in\omega_0}dt$$

Zveza med obema zapisoma:

- $n = 0 : c_0 = \frac{a_0}{2}$
- $n > 0 : c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
- $n < 0 : c_n = \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2}$

Negativne frekvence so matematicni konstrukt, ki nam pride prav pri opisovanju singalov. Vsako sinusoido opisemo z dvema parametroma, prej a_n, b_n, sedaj pa elegantno s c_n in c_{-n}.

5.2.2 Fourierova transformacija

Fourierovo vrsto lahko posplosimo tako, da spustimo $T \to \infty$ in dobimo Fourierovo transformacijo. Predstavlja jedro vseh frekvencnih analiz. Enacba:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)e^{-i2\pi\nu t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$$

Manjsi kot je T v casovnem prostoru, sirsi je signal v frekvencnem prostoru.

Lastnosti Fourierove transformacije:

- linearnost: $f(t) = ax(t) + by(t) \to F(\nu) = aX(\nu) + bY(\nu)$
- skaliranje: $f(t) = x(at) \to F(\nu) = \frac{1}{|a|}X(\frac{1}{a}\nu)$
- premik: $f(t) = x(t - t_0) \to F(\nu) = e^{-i2\pi\nu t_0}X(\nu)$
- modulacija: $f(t) = e^{i2\pi t\nu_0}x(t) \to F(\nu) = X(\nu - \nu_0)$
- konvolucija: $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)y(\tau)d\tau \to F(\nu) = X(\nu)Y(\nu)$

5.2.3 Diskretna Fourierova transformacija - DFT

Frekvenca vzorcenja ν_s (sampling) je obratno sorazmerna periodi vzorcenja $\nu_s = \frac{1}{\Delta}$. Postopek:

- Ocenimo Fourierovo transformacijo iz N zaporednih vzorcev.

  $$x_k = x(k\Delta), k = 0, 1, \dots, N - 1$$

- Iz N vzorcev na vhodu v DFT bomo lahko izracunali natanko N neodvisnih tock na izhodu.
- Namesto, da bi dolocili DFT za vse tocke od $-\nu_C$ do $+\nu_C$, se lahko omejimo samo na dolocene vrednosti

  $$\nu_n = \frac{n}{N\Delta}, n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$$

  spodnja in zgornja meja ustrezata ravno Nyquistovi frekvenci.

- Trenuten zapis vkljucuje $N+1$ vrednost. Izkazalo se bo, da sta obe robni vrednosti enaki. Imamo jih zaradi lepsega zapisa.
- Naprej so stvari trivialne

  $$X(\nu_n) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi\nu_n t}dt = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi\nu_n k\Delta}\Delta$$

- Ce v zgornji enacbi izpustimo Δ, dobimo enacbo za DFT:

  $$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{\frac{-i2\pi nk}{N}}$$

Stevilo vzorcenj: $N = \frac{\nu_s}{\min(\Delta\nu_s)}$

Povezava s Fourierovo transformacijo je $X(\nu_n) \approx \Delta X_n$ Iz enacbe za DFT sledi, da je DFT periodicna s periodo N. To pomeni, da je $X_{-n} = X_{N-n}$ Koeficiente X_n lahko zato namesto na intervalu $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$ racunamo na intervalu $[0, N - 1]$.

Zveza med koeficienti $X_0, \dots, X_{N-1}$ in frekvencami $-\nu_C, \dots, \nu_C$:

indeks	frekvenca
$n = 0$	$\nu = 0$
$1 \leq n \leq \frac{N}{2-1}$	$0 < \nu < \nu_C$
$\frac{N}{2}$	$-\nu_C, +\nu_C$
$\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq N - 1$	$\nu_C < \nu < 0$

5.2.4 Inverzna DFT

$$x_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{\frac{i2\pi nk}{N}}$$

5.3 Resonanca

Do resonance pride, ko je frekvenca vsiljenega nihanja enaka frekvenci lastnega nihanja. Takrat pride do ojacitve amplitud.

5.4 Modulacija in frekvencni premik

Iz osnovne trigonometrije vemo:

$$\sin(2\pi\nu_1 t)\sin(2\pi\nu_2 t) =$$
$$\frac{1}{2}[\cos(2\pi(\nu_1 - \nu_2)t) - \cos(2\pi(\nu_1 + \nu_2)t)]$$
$$\cos(2\pi\nu t) = \sin(2\pi\nu t + \pi/2)$$

Produkt sinusoid s frekvencama ν_1 in ν_2 lahko torej zapisemo kot vsoto sinusoide s frekvenco $\nu_1 + \nu_2$ in sinusoide s frekvenco $\nu_1 - \nu_2$.

To lastnost izkorisca amplitudna modulacija (radijske postaje AM) in frekvencni premik, s katerim lahko zagotovimo hkraten prenos vec signalov po istem mediju.

5.5 Teorem vzorcenja

Signal moramo vzorciti vsaj s frekvenco $2\nu_c$, ce je najvisja opazena frekvenca v signalu ν_c. Na tem zakljucku sloni vsa danasnja tehnologija.

5.5.1 Zajem signalov

Zvezni signal $x(t)$ je funkcija zvezne spremenljivke t. Diskreten signal je definiran samo za dolocene case, ki si najpogosteje sledijo v enakih casovnih intervalih $x_k = x(k\Delta)$, Δ je perioda vzorcenja.

Signale danes obicajno zajemamo z racunalniki. Za to se uporabljajo vezja A/D pretvorniki. Imajo koncno natancnost, na primer 12bit. Signal torej opisemo s koncno mnogo razlicnimi amplitudami 2^{12}.

5.6 Energija signala

Definicija:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt$$

Parsevalov teorem

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{-\infty} \infty |X(\nu)|^2 d\nu$$

Porazdelitev energije po frekvencah podaja funckija $|X(\nu)|^2$, ki jo imenujemo **energijska spektralna gostota**.

5.6.1 Mocnostni spekter diskretnega kanala

Diskretna razlicica Parsevalovega teorema:

$$\sum_{k=1}^{N-1} |x_k|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |X_n|^2$$

Pri diskretni razlicici je PSD vedno v intervalu $[-\nu_C, \nu_C]$. Mocnostni spekter je potem:

- $P(0) = \frac{1}{N^2}|X_0|^2$
- $P(\nu_n) = \frac{1}{N^2}[|X_n|^2 + |X_{N-n}|^2]$, $n = 1, 2, \dots, \frac{n}{2-1}$
- $P(\nu_C) = \frac{1}{N^2}|X_{\frac{N}{2}}|^2$